ZESTAW III
Granica funkcji

Zadanie 1. Oblicz granice:

$a)$ $\lim\limits_{x\to 4}(2x-7)$; $b)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x+1}$; $c)$ $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2}{x+3}$;

$d)$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$; $e)$ $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+8}$; $f)$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

$g)$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x^2-x-1}$; $h)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; $i)$ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{1+x}+2}{\sqrt{1+x^2}}$;

$j)$ $\lim\limits_{x\to 100}\dfrac{\sqrt{x}-10}{x-100}$; $k)$ $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}$; $l)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{25^x-9^x}{5^x-3^x}$;

$m)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$; $n)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{2x}$; $o)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

Zadanie 2. Oblicz granice jednostronne następujących funkcji w podanych punktach i rozstrzygnij, czy funkcje te mają w tych punktach granice:

$a)$ $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ w punkcie $x=1$; $b)$ $f(x)=x\lfloor x\rfloor$ w punkcie $x=0$;
$c)$ $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ w punkcie $x=0$; $d)$ $f(x)=\frac{|x+2|^3}{2+x}$ w punkcie $x=-2$;
$e)$ $f(x)=\frac{\operatorname{sgn}(x^3)}{\operatorname{sgn}(x)}$ w punkcie $x=0$; $f)$ $f(x)=\frac{\lfloor -x\rfloor}{\lfloor x\rfloor}$ w punkcie $x=3$.

Zadanie 3. Uzasadnij, że podane granice funkcji nie istnieją:

$a)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}$; $b)$ $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$; $c)$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x-1}$;

$d)$ $\lim\limits_{x\to -2}\lfloor x\rfloor$; $e)$ $\lim\limits_{x\to 0}3^{\frac{1}{x}}$; $f)$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\ln x}$.

Zadanie 4. Sprawdź z definicji (Heinego, Cauchy'ego), czy następujące funkcje $f:A\to\mathbb{R}$ są ciągłe:

$a)$ $A=\mathbb{R},\ f(x)=x^4+1$; $b)$ $A=\mathbb{R}\setminus\{0\},\ f(x)=-\frac{1}{x}$;

$c)$ $A=\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ f(x)=\frac{5x+2}{x+1}$; $d)$ $A=\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2 & \text{dla } x\le 2\\ x & \text{dla } x>2\end{cases}$;

$e)$ $A=\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla } x\neq 0\\ 0 & \text{dla } x=0\end{cases}$; $f)$ $A=\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x & \text{dla } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{dla } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$;

$g)$ $A=\mathbb{R},\ f(x)=x-[x]$; $h)$ $A=\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & \text{dla } 0\le x\le 1\\ 4-2x & \text{dla } 1<x<2,5\\ 2x-7 & \text{dla } 2,5\le x\end{cases}$;

$i)$ $A=\mathbb{R}\setminus\{3\},\ f(x)=\frac{\operatorname{sgn} x^2}{\operatorname{sgn}(x-3)}$; $j)$ $A=\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{|x-3|}{(x-3)} & \text{dla } x\neq 3\\ 1 & \text{dla } x=3\end{cases}$;

$k)$ $A=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ f(x)=\lfloor x\rfloor$; $l)$ $A=\mathbb{R},\ f(x)=(x^3-x)\lfloor x\rfloor$.

Zadanie 5. Dobierz parametry a, b, c tak, aby funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ była ciągła:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 5 \\ ax + b & \text{dla } x \geq 5 \end{cases} \quad ; \quad b)\ f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & \text{dla } x < 0 \\ \frac{x^3-1}{x^2+x-2} & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ c & \text{dla } x = 1 \\ \frac{x^2+(b-1)x-b}{x-1} & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

Zadanie 6. Określ funkcję $f(x)$ w punkcie $x = 0$ tak, aby była ona ciągła:

$a)\ f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$; $\quad b)\ f(x) = \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$; $\quad c)\ f(x) = \frac{(1+x)^a - 1}{x}$.